MIIA – Präsenzaufgaben Nr. 5
23.5 – 25.5.2007

1. Man beweise für eine stetige Abbildung $\phi : X \to Y$ zwischen kompakten metrischen Räumen X und Y: Ist ϕ bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : Y \to X$ stetig, ϕ ist also ein Homöomorphismus.

2. Man entscheide: Gilt die vorangehende Aussage auch, wenn über Y nicht vorausgesetzt wird, dass Y kompakt ist?

3. Man gebe eine Beispiel für allgemeine Räume X, Y, bei denen die Aussage falsch ist.

4. Für die Schraubenlinie $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, bestimme man die Geschwindigkeitsvektoren in $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, ?)$ und visualisiere die Ergebnisse.

5. Man bestimme eine Parametrisierung von $C = \{x+tv \,:\, -1 \le t \le 1\} \cup \{x+v+sw \,:\, 0 \le s \le 2\}$ für Vektoren $x, v, w \in E$ (E ein normierter Raum, z.B. $E = \mathbb{R}^2$), die paarweise linear unabhängig sind.

   Man begründe, warum $L = 2\,\|v\| + 2\,\|w\|$ die „Länge“ von C ist.

   Findet man „Zwischenvektoren“ $x_0 = x - v, x_1, \dots, x_m = x + v + 2w \in C$, so dass gilt:

   $$\sum_{k=1}^{m} \|x_k - x_{k-1}\| < L\,?$$

   Gibt es eine Parametrisierung γ auf $[0, 1]$ mit

   $$\sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| > 100(\|v\| + \|w\|)$$

   mit geeigneten $0 = t_0 < t_k < t_{k+1} < t_m = 1$?

6. Man zeige für eine Folge von stetigen Funktionen (f_n) auf dem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$: Wenn die Folge gleichmäßig gegen f konvergiert, so gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dt = \int_a^b f\,dt\,.$$